**I.  Introduction**

Les calculs d'aire et de volume sont à l'origine de calcul intégral. Les premiers calculs d'aire sont dus à **Eudoxe** et **Archimède** qui utilisent une méthode consistant à encadrer la surface dont l'on cherche l'aire par des surfaces polygonales.  
**Leibniz** comme**Fernat** pensent que les aires, les volumes et les surfaces sont comme des rectangles et des cylindres et utilisent les expressions intégrales définies.  
C'est au XVIIe siècle que se tendent la notion et les méthodes de calculs d’intégral d’aires et c'est à **Gauchy** (1831) que l'on doit la définition précise de l'intégral d'une fonction continue sur un intervalle [a;b] et la notation  . La théorie se généralise avec **Riemann** et **Lebesgue**. De nos jours, les calculs intégrals sont utilisés en mécaniques, en physique, économie, etc.

**II.  Primitive d'une fonction**

**A.  Notion**

**Activité**

Soit **,** deux fonctions continues et dérivables sur ℝ.  
Calculer .

**Solution**

. On constate que . Les fonctions  sont appelées des primitives de  sur ℝ.

**B.  Définition**

Soit  une fonction continue sur un intervalle I. On appelle primitive de  sur I, toute fonction  dérivable sur I tel que

**C.  Propriétés**

**Propriété 1**

Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I.

**Propriété 2**

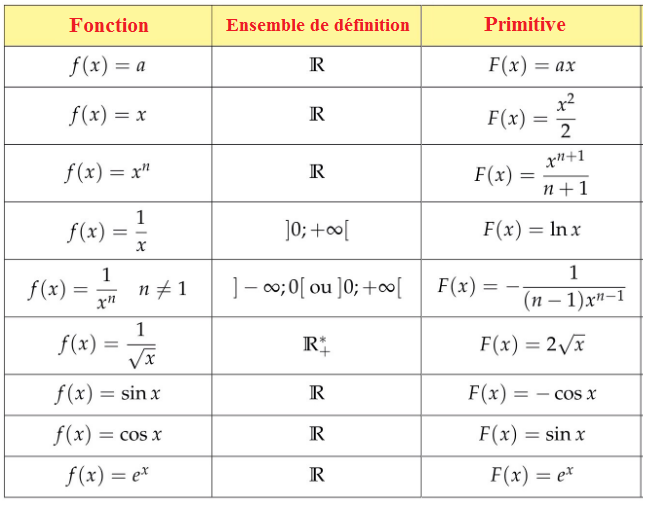
Si f est une fonction admettant une primitive  sur I alors toute fonction G tel que  est aussi une primitive de  sur I, il existe une et une seule primitive vérifiant les conditions initiales données.

**Propriété 3**

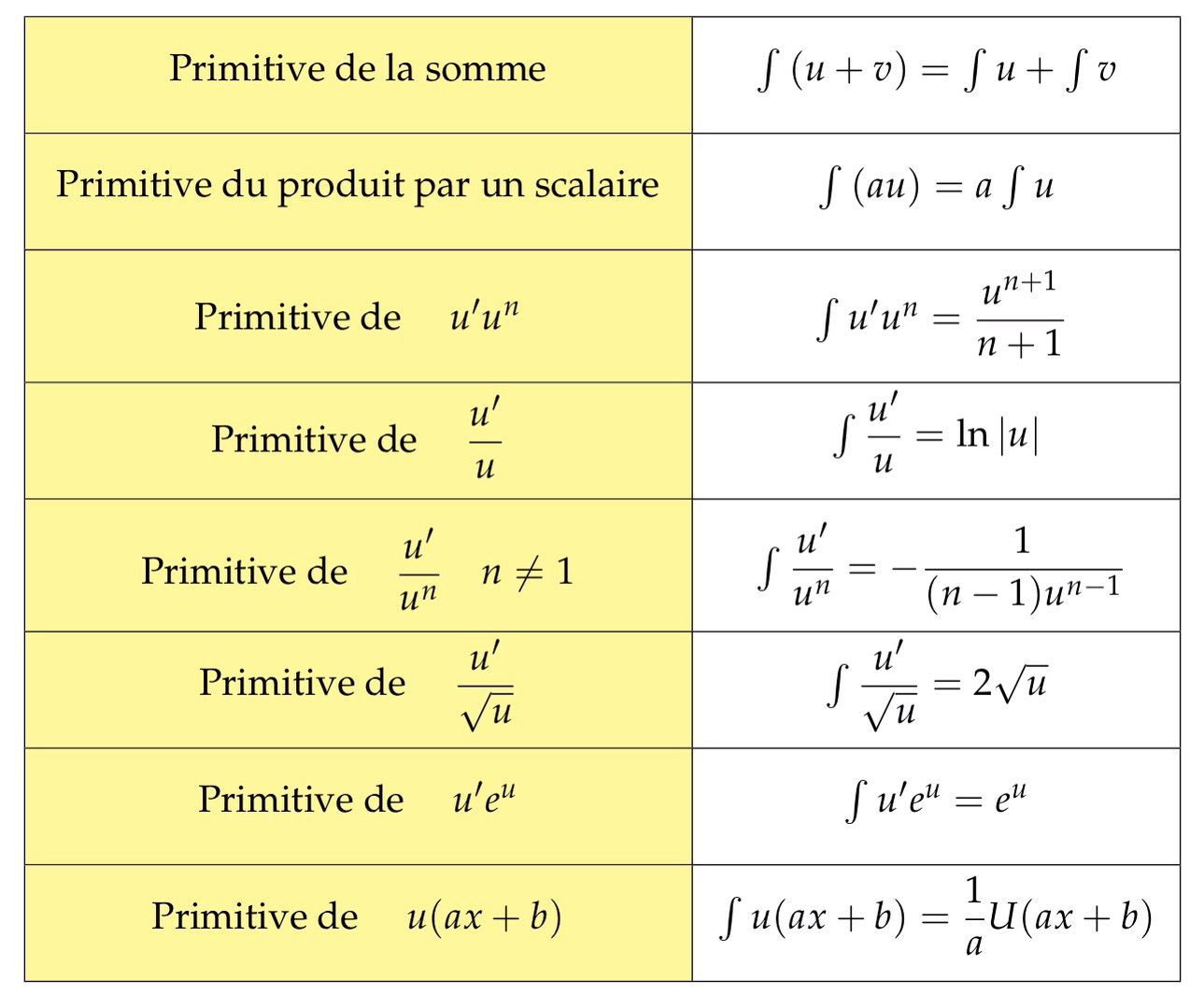
Si  admet des primitives sur I, alors il existe une et une seule primitive vérifiant les conditions initiales données.

**D.  Primitives de fonction**

**1.  Fonctions usuelles**



**2.  Opération sur les primitives**



**III.  Calcul intégral**

**A.  Intégral d'une fonction continue sur un intervalle**

**1.  Définition**

 Soit  une fonction continue sur un intervalle . Le réel  où F est une primitive de  sur  est appelé intégrale de  de f. On le note  et se lit  ». On note aussi :  
= =

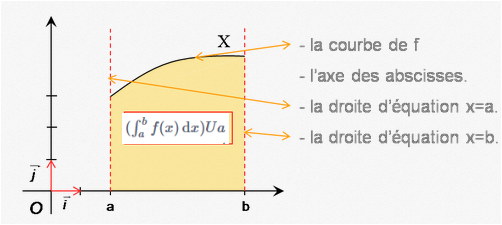
**Remarque**

 On peut remplacer la variable x par n’importe quelle lettre différente de . On dit que x est la **variable muette**.  sont appelées les **bornes d’intégration**.

**2.  Interprétation graphique**

**Théorème**

 Le plan minus d’un repère orthogonal soit f une fonction continue et positive sur  . On appelle () l’aire du domaine plan délimité par la courbe de  , l’axe des abscisses, les droites d’équation  .



A=) ,  (unité d'aire)  
1 : l’unité sur l’axe des abscisses multipliée par l’unité sur l’axe des ordonnées.

**Remarque**

Il ne faut pas confondre le calcul intégral et le calcul d’aire.  
Le calcul d’aire est une application du calcul d’intégral. Une intégrale peut être négative tandis que l’aire est toujours positive.

**3.  Propriétés**

**Propriété1**

**Propriété2**

**Propriété3**

**Propriété4**

**Propriété5**

Si  est continue sur , on a :  
+=

**Propriété6**

**i)** Si  est positive sur  alors ,   
**ii)** Si  ≤ sur  alors ≤ donc l’intégrale conserve l’ordre.

**Propriété7**

**i)** Si f est continue et paire sur  alors=  
**ii)** Si f est continue et impaire alors = 0  
**iii)** Si f est continue et périodique de période  alors  
  
=  
**ou**  
=

**Propriété8**

Si  est continue sur , alors

est la primitive de  qui s’annule en a sur

**Propriété9**

Si  est continue sur  et  le réel  est appelé la valeur moyenne de  sur .

**Propriété10**

On appelle inégalité de la moyenne si  est continue sur et bornée  
c’est-à-dire  alors

**B.  Technique de calcul des intégrales**

**1.  Intégrale des primitives trigonométriques**

 Il faut parfois linéariser la fonction trigonométrique avant de calculer l’intégrale.

**2.  Intégration par partie**

**Théorème**

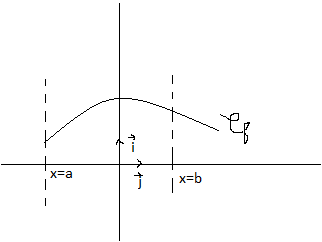
Soient u et v deux fonctions dérivables sur  ; si  sont continues sur  alors

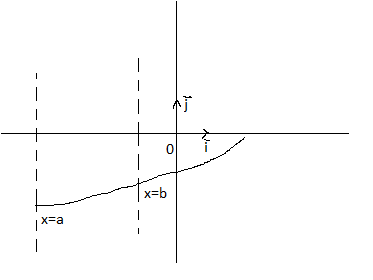
 sont dérivables sur ***I***, on a :  
  
  
En appliquant l’opération sur les intégrales, on a :

**C.  Application du calcul intégral**

**1.  Calcul d’aire**

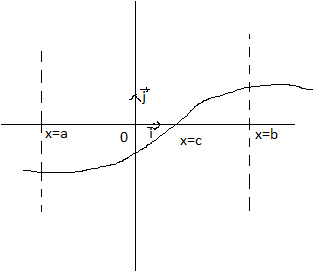
 L’aire du domaine plan délimité par la courbe l’axe des abscisses et par les droites d’équation nécessite le calcul intégral.

* **La courbe se trouve au-dessus de l’axes des abscisses.  
    
  A**=

* **La courbe se trouve au-dessous de l’axes des abscisses.**

**A**=

**A**=

**La courbe se trouve coupe l’axes des abscisses.  
  
A**=

**2.  Calcul de volume**

**Théorème1**

Si  est une fonction continue sur  et si  sa courbe représentative dans un repère orthogonal. Lorsqu'on fait tourner   autour de l'axe des abscisses  alors   forme un solide de volume ).

**Théorème2**

Si f est une fonction continue sur  et si    sa courbe représentative dans un repère orthogonal. Lorsqu'on fait tourner   autour de l'axe des ordonnées  alors    forme un solide de volume ).